Маленькая математика: пределы и производные

Последовательности

Последовательность формально — функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

$$a(1) = 1,\ a(2) = 3,\ a(3) = 5\ , a(4) = 7, \dots$$

$$a(n) = 2n - 1$$

Никто не пишет $a(n)$, это не удобно. Пишут a_n.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7, \dots$$

$$a_n = 2n - 1$$

Бесконечно малые последовательности

На прошлой лекции, кроме прочего, был интересный факт про то, что последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ бесконечно малая:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Почему это верно?

Хотим доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать число N такое, что для всех $n > N$ будет верно $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пусть нам дали $\varepsilon > 0$. Наша очередь выбрать N.

Как выбрать N? Мы хотим $\frac{1}{n} <^? \varepsilon$. Перепишем: $n >^? \frac{1}{\varepsilon}$.

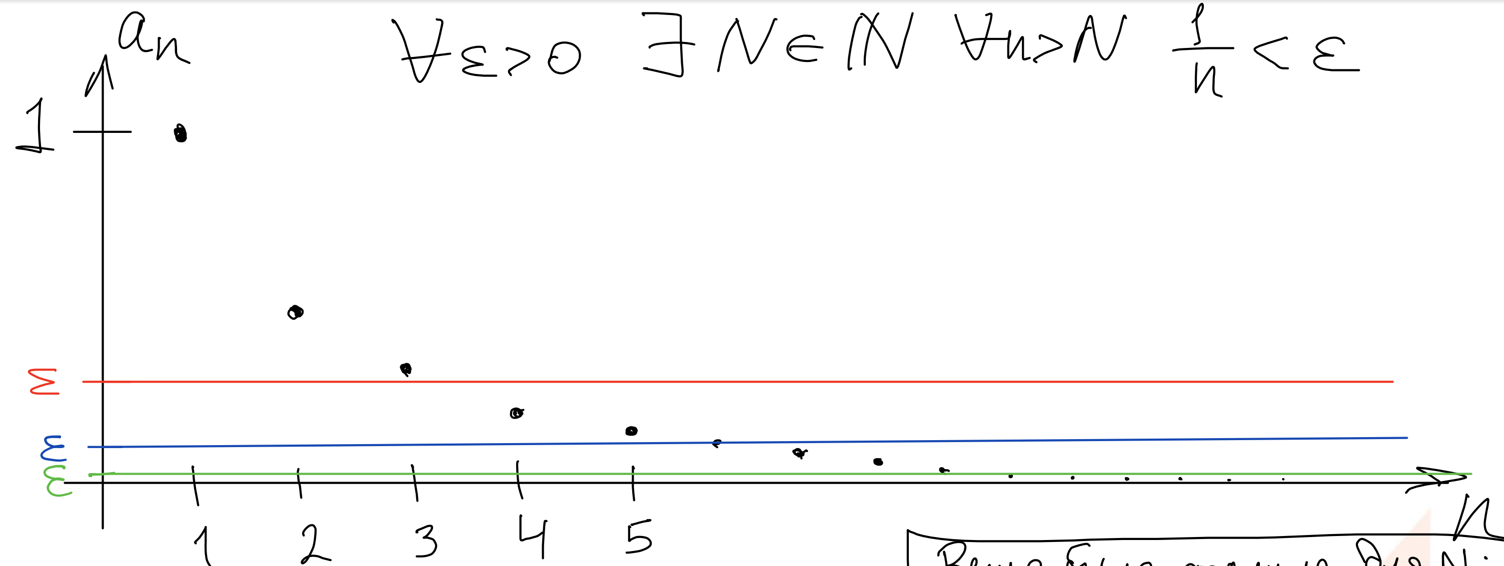
Если возьмем $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ то для любого $n > N$ будет верно

$$n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит, для любого $n > N$ верно $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Доказали.

Графическая иллюстрация бесконечно малого

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \ \frac{1}{n} < \varepsilon$$



Для $\varepsilon = 0{,}3$ подходит $\underline{N = 3}$

Для $\varepsilon = 0{,}17$ подходит $\underline{N = 6}$

Для $\varepsilon = 0{,}11$ подходит $\underline{N = 9}$

Для $\varepsilon = 0{,}001$ подходит $\underline{N = 1000}$

Выше была формула для N:

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Проверим её:

$\varepsilon = 0{,}3 \Rightarrow$

$$N = \left[\frac{1}{0{,}3}\right] + 1 = [3{,}33..] + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Тоже ок, если можно начать с $N = 3$, то с $N = 4$ тоже можно.

Будем писать

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

если последовательность a_n бесконечно малая, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n| < \varepsilon.$$

Простые примеры

Почему последовательность $a_n = 0$ бесконечно малая?

Пусть $\varepsilon > 0$. Наша очередь выбирать N, и мы возьмем $N = 1$.

Мы хотим доказать, что для любого $n > 1$ верно $0 < \varepsilon$. Но это и так верно. Доказали.

А что насчет последовательности $a_n = \frac{3}{n^2}$?

Хотим: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \frac{3}{n^2} < \varepsilon$.

Т.е. хотим для любого $\varepsilon > 0$ выбирать такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого n, большего N, будет верно $\frac{3}{n^2} < \varepsilon$.

Пусть нам дали $\varepsilon > 0$.

Как выбрать N?

Думаем: $\frac{3}{n^2} < \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} < n^2 \iff n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$.

Выбираем: $N = \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right] + 100$.

Пусть $n > N$ — любое.

Тогда $n > \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\right] + 100 \Rightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \iff \frac{3}{n^2} < \varepsilon$. Доказали $\blacksquare$

см. „Думаем:“ выше

Попробуйте доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{11}{n\sqrt{n}} = 0$.

Хотим: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \frac{11}{n\sqrt{n}}<\varepsilon$.

Т.е. хотим для любого $\varepsilon>0$ выбирать такое $N\in\mathbb{N}$, что для любого n, большего N, будет верно $\frac{11}{n\sqrt{n}}<\varepsilon$.

Пусть нам дали $\varepsilon>0$.

Как выбрать N?

Думаем: $\frac{11}{n\sqrt{n}}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{121}{n^3}<\varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{121}{\varepsilon^2}<n^3 \Leftrightarrow n>\sqrt[3]{\frac{121}{\varepsilon^2}}$

Выбираем: $N=\left[\sqrt[3]{\frac{121}{\varepsilon^2}}\right]+100$

Пусть $n>N$ — любое.

Тогда $n>\left[\sqrt[3]{\frac{121}{\varepsilon^2}}\right]+100 \Rightarrow n>\sqrt[3]{\frac{121}{\varepsilon^2}} \Leftrightarrow \frac{11}{n\sqrt{n}}<\varepsilon$ Доказали ∎

см. „Думаем:" выше

Антипримеры

Верно ли, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

где $a_n = 0$ при четных n и $= 1$ при нечетных n?

Неверно. Определение: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N \quad |a_n| < \varepsilon.$

Его отрицание: $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N \quad |a_n| \geqslant \varepsilon.$

Доказываем отрицание. Возьмем $\varepsilon = 0{,}1$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ любое.

Возьмем $n = N + 1$, если N четное,

или $n = N + 2$, если N нечетное.

Тогда n нечетное в любом случае $\Rightarrow a_n = 1.$

$\Rightarrow a_n \geqslant \varepsilon.$

Доказали. $\blacksquare$

Предел последовательности

Как определить, что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$?

Логично, что если от каждого члена a_n отнять A, то полученная последовательность должна стремиться к 0:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0.$$

Это можно считать за определение. То есть, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ **определяется так**:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n - A| < \varepsilon.$$

Попробуем найти
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+4}?$$

Скорее всего, предел будет 1. Попробуем доказать это.

Хотим: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \left|\frac{n+2}{n+4}-1\right|<\varepsilon.$

Пусть $\varepsilon>0$ любое.

Как выбрать N?

Думаем: $\left|\frac{n+2}{n+4}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-2}{n+4}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+4}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-4.$

Возьмем $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+100.$

Пусть $n>N$ любое. Тогда $n>\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+100>\frac{2}{\varepsilon}-4.$

Значит $n>\frac{2}{\varepsilon}-4 \Leftrightarrow$ ... (см. "Думаем:") ... $\Leftrightarrow \left|\frac{n+2}{n+4}-1\right|<\varepsilon.$

Доказали. ∎

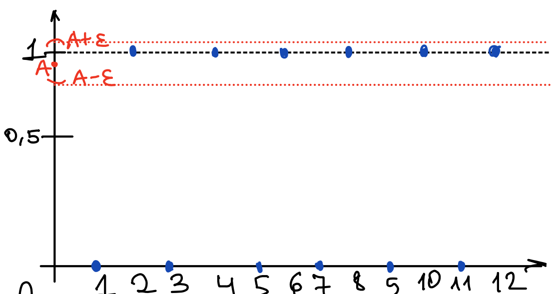
Несуществующие пределы

У последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

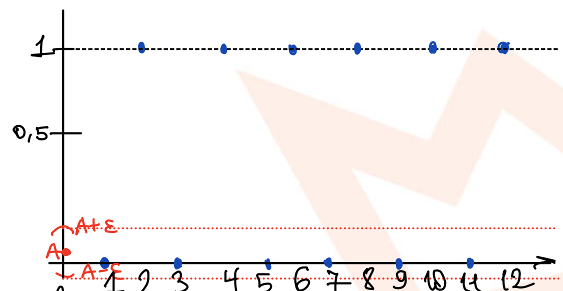
нет предела. Действительно, пусть A — любое число.
Докажем отрицание предела: $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N\ |a_n - A| \geq \varepsilon$
Возьмем $\varepsilon = 0{,}1$. Пусть N — любое. Рассмотрим два случая:

① $A > 0{,}5$:



В этом случае, если взять n нечетное $> N$, то:
$|a_n - A| = |0 - A| = A > 0{,}5 > \varepsilon. \Rightarrow |a_n - A| \geq \varepsilon.$

② $A < 0{,}5$



В этом случае, если взять n четное $> N$, то:
$|a_n - A| = |1 - A| > 0{,}5 > \varepsilon \Rightarrow |a_n - A| \geq \varepsilon.$

Свойства пределов

Сейчас мы докажем чуть-чуть свойств пределов.

Для этого нам понадобится

Лемма (Неравенство треугольника)

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство. Возведем в квадрат (так как обе части неотрицательные):

$$(x+y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2$$

$$2xy \leq 2|x|\cdot|y| \text{ — верно.}$$

Лемма (Обратное неравенство треугольника)

Для любых $z, x \in \mathbb{R}$ *верно*

$$|z - x| \geq |z| - |x|.$$

Доказательство. Подставим в $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ $y = z-x$:

$$|x+z-x| \leqslant |x| + |z-x|$$

$$|z| \leq |x| + |z-x|$$

$$|z|-|x| \leq |z-x|.$$

Предел константы

Теорема

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

Доказательство. Будет на упражнениях (если еще не очевидно).

Хотим: $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \underbrace{|\underset{a_n}{\underset{\parallel}{C}} - \underset{\lim a_n}{\underset{\parallel}{C}}|<\varepsilon}$

$\Leftrightarrow 0<\varepsilon$ — и так верно.

$\blacksquare$

Теорема сложения

Теорема

Если $\lim a_n = A$ *и* $\lim b_n = B$, *то существует*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B.$$

Доказательство. Пользуемся определением $\lim_{n\to\infty} a_n = A$: для числа $\varepsilon/2$ можно выбрать такое N_1, что

$$\forall n > N_1 \;\; |a_n - A| < \varepsilon/2.$$

Теперь $\lim_{n\to\infty} b_n = B$: можно выбрать такое N_2, что

$$\forall n > N_2 \;\; |b_n - B| < \varepsilon/2.$$

Мы хотим доказать

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon.$$

Возьмём $N = \max(N_1, N_2)$.

Тогда при $n > N$ имеем $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n - B| < \varepsilon$, а поэтому:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказали. $\square$

Теорема умножения

Не было, но можно прочитать.

Теорема

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, *то существует*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB.$$

Доказательство. Давайте без лишних слов:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \\ &= |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \\ &\le |(a_n - A)| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B|.\end{aligned}$$

У b_n есть предел, значит b_n ограниченная последовательность: $|b_n| \le M$ для некоторого $M \in \mathbb{R}$.

Далее, найдем N_1 такой, что

$$\forall n > N_1 \;\; |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

и такой N_2, что

$$\forall n > N_2 \;\; |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}.$$

Получим, что при $n > N = \max(N_1, N_2)$

$$|a_n b_n - AB| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon.$$

$\square$